ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПЕРВОГО РОДА С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ И МЕТОДАХ ИХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ [1]

Н.Б. Плещинский (Казань)

К интегральным уравнениям 1-го рода с логарифмической особенностью в ядре приводятся многие задачи математической физики, в том числе, задачи электродинамики и теории упругости. В данной работе обсуждается ряд вопросов, связанных как с теоретическим исследованием таких уравнений, так и с разработкой методов их численного решения. Основное внимание уделено методам построения явных решений в тех случаях, когда это возможно, и преобразованию уравнений 1-го рода в уравнения 2-го рода, подчиняющиеся теории Фредгольма (методам регуляризации). В качестве конкретных примеров рассмотрены интегральные уравнения двух скалярных задач дифракции электромагнитных волн на тонких металлических лентах.

1. Уравнения, разрешимые в замкнутой форме

Одним из наиболее простых уравнений 1-го рода с логарифмическим ядром является уравнение на отрезке вещественной оси

$$\int_a^b \varphi(t) \ln \frac{1}{|t-x|}\, dt = f(x), \quad x \in (a,b). \tag{1.1}$$

Решение этого уравнения на единичном отрезке $[0,1]$ впервые получил методом аналитического продолжения в комплексную плоскость Т. Карлеман [1] в 1922 г. Другая работа Т. Карлемана [2] сыграла не менее важную роль в становлении теории сингулярных интегральных уравнений (СИУ) и краевых задач для аналитических функций. В этой работе метод аналитического продолжения использован при обращении характеристического

[1] Работа выполнена при поддержке фонда НИОКР РТ (грант 05-5.1-16.2002 (Ф))

сингулярного уравнения, решена краевая задача Римана (задача линейного сопряжения) для аналитических функций для отрезка $[0,1]$ и предложен метод регуляризации полного сингулярного уравнения методом обращения его характеристической части. Все эти идеи использовались в дальнейшем многими авторами, в книгах Ф.Д. Гахова [3] и Н.И. Мусхелишвили [4] в деталях изложены результаты, полученные в этом направлении, и даны ссылки на литературу.

При исследовании полного СИУ с ядром Коши на кусочно-гладкой линии L

$$a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \varphi(t)\,\frac{M(\tau,t)}{\tau - t}\,dt = f(t), \quad t \in L \tag{1.2}$$

слева выделяется характеристическая часть сингулярного оператора и рассматривается характеристическое уравнение

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{\tau - t}\,dt = f(t), \quad t \in L \quad (b(t) = M(t,t)). \tag{1.3}$$

В силу формул Сохоцкого предельные значения на L интеграла типа Коши (вспомогательной функции, аналитической вне L на комплексной плоскости) удовлетворяют условию краевой задачи Римана, решение которой можно записать в явном виде. Решив эту задачу Римана, получим также в явном виде решение характеристического уравнения. Если в уравнении (1.2) оставить слева характеристическую часть, а регулярную часть перенести вправо, то с помощью формулы обращения характеристического уравнения (1.3) получим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. Этот метод регуляризации называют методом Карлемана-Векуа.

Рассмотрим частный случай уравнения (1.3)

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{\tau - t}\,dt = f(t), \quad t \in L. \tag{1.4}$$

Этот случай сводится к краевой задаче для аналитических функций с условием $\Phi^+(t)+\Phi^-(t) = f(t)$ на L. Пусть L – разомкнутая гладкая линия, состоящая из m дуг и c_j, $j = 1\,..\,2m$ – все их концевые точки, перенумерованные в некотором порядке. Пусть $0 \leq m_1 \leq 2m$ и

$$\Pi_1(z) = \left(\prod_{j=1}^{m_1}(z - c_j)\right)^{1/2}, \quad \Pi_2(z) = \left(\prod_{j=m_1+1}^{2m}(z - c_j)\right)^{1/2},$$

$$\Pi(z) = \left(\prod_{j=1}^{2m}(z - c_j)\right)^{1/2}.$$

Если $m_1 < m$, то

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\frac{\Pi_1(t)}{\Pi_2(t)}\int\limits_L \frac{\Pi_2(\tau)}{\Pi_1(\tau)}\frac{f(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{\Pi_1(t)}{\Pi_2(t)}P_{m-m_1-1}(t), \tag{1.5}$$

где $P_{m-m_1-1}(t)$ - полином с произвольными коэффициентами степени не выше, чем $m - m_1 - 1$. Если $m_1 \geq m$, то полином равен нулю. При $m_1 > m$ единственное решение уравнения (1.4) вида (1.5) существует тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_L t^j\,\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}\,f(t)\,dt = 0, \quad j = 0\,..\,m_1 - m - 1. \tag{1.6}$$

Это утверждение (см. [5], гл. III, §7) было установлено Н.И. Мусхелишвили в 1941 г. в случае, когда L – гладкая линия и функции $f(t)$, $\varphi(t)$ принадлежат классу H^*, и Б.В. Хведелидзе в середине 50-х годов для ляпуновских линий и функций, интегрируемых по Лебегу с весом. Отметим, что при этом не использовался метод аналитического продолжения. Формула (1.5) была получена из легко проверяемых интегральных тождеств.

1.1. Уравнение Карлемана и его обобщения

Построим явное решение уравнения Карлемана (1.1) на произвольном отрезке вещественной оси и уточним, какому классу функций принадлежат его решение и правая часть.

Исследуем предварительно свойства ядра уравнения. Функция $\ln x$ при вещественном x - однозначная вещественнозначная функция вещественного аргумента с областью определения $x > 0$. Комплекснозначная функция комплексного аргумента

$\ln z = \ln|z| + i\arg z$ – многозначная функция с точками ветвления 0 и ∞. Соединим точки ветвления разрезом комплексной плоскости по участку вещественной оси $-\infty < \operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z = 0$ и условимся считать, что аргумент комплексных чисел на полуоси $0 < \operatorname{Re} z < +\infty$, $\operatorname{Im} z = 0$ равен нулю. Тогда получим естественное продолжение $\ln z$ функции $\ln x$ в комплексную плоскость (с разрезом). При этом предельные значения логарифмической функции на берегах разреза $\ln^{\pm} x = \ln|x| \pm i\pi$, $x < 0$.

Пусть t – фиксированная точка вещественной оси. Для функции $\ln(t-z)$ разрез комплексной плоскости проведем от бесконечно удаленной точки до точки t по части вещественной оси $-\infty < \operatorname{Re} z < t$. Тогда $\ln(t-x) = \ln|t-x|$ при $x < t$ и $\ln^{\pm}(t-x) = \ln|t-x| \mp i\pi$ при $x > t$. Поэтому при всех $x \neq t$ ядро уравнения Карлемана (1.1) можно рассматривать как полусумму предельных значений на вещественной оси однозначной ветви логарифмической функции $\ln(t-z)$:

$$\ln|t-x| = \frac{1}{2}\Big[\ln^{+}(t-x) + \ln^{-}(t-x)\Big].$$

Пусть $b > t$. Разность логарифмических функций $L_b(t,z) = \ln(b-z) - \ln(t-z)$ представляет собой функцию, аналитическую в комплексной плоскости с разрезом от t до b, имеющую логарифмические особенности в этих точках и обращающуюся в нуль на бесконечности. Поэтому, как решение задачи о скачке, эта разность может быть записана как интеграл типа Коши

$$L_b(t,z) = \int\limits_t^b \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

При этом на вещественной оси

$$\ln|b-x| - \ln|t-x| = \frac{1}{2}\Big[L_b^{+}(t,x) - L_b^{-}(t,x)\Big] = \int\limits_t^b \frac{d\xi}{\xi - x}.$$

Введем вспомогательную неизвестную постоянную

$$C = \int\limits_a^b \varphi(t)\,dt$$

и добавим к левой и правой частям уравнения (1.1) выражение $C\ln(b-x)$. Получим

$$\int_a^b \varphi(t)\left(\int_t^b \frac{d\xi}{\xi-x}\right)dt = f(x) + C\ln(b-x), \quad x\in(a,b)$$

или, после изменения порядка интегрирования, сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши (см. (1.4))

$$\int_a^b \left(\int_a^\xi \varphi(t)\,dt\right)\frac{d\xi}{\xi-x} = f(x) + C\ln(b-x), \quad x\in(a,b) \tag{1.7}$$

относительно новой искомой функции

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt.$$

Так как $\psi(a)=0$, $\psi(b)=C$, то решение уравнения (1.7) принадлежит классу ограниченных на всех концах отрезка функций. Поэтому решение существует тогда и только тогда, когда выполняется одно условие разрешимости вида (1.6)

$$\int_a^b \frac{f(t)+C\ln(b-t)}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}\,dt = 0$$

или, вычисляя интеграл,

$$C\pi\ln\frac{b-a}{4} + \int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}\,dt = 0. \tag{1.8}$$

Легко видеть, что картина разрешимости уравнения (1.1) зависит от длины отрезка $[a,b]$. Если $b-a\neq 4$, то из (1.8) постоянная C определяется, решение уравнения (1.1) единственно и имеет вид

$$\psi(x) = -\sqrt{(b-x)(x-a)}\,\frac{1}{\pi^2}\int_a^b \frac{f(t)+C\ln(b-t)}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}\,\frac{dt}{t-x} \tag{1.9}$$

(это частный случай формулы (1.5)). Если же $b - a = 4$, то уравнение (1.8) разрешимо тогда и только тогда. когда

$$\int\limits_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}\, dt = 0. \tag{1.10}$$

При этом постоянная C остается произвольной, а решение уравнения (1.1) дает та же формула (1.9).

На условие однозначной разрешимости уравнения Карлемана вида $b - a \neq 4$ впервые обратил внимание С.Г. Самко (см. [3], §55) и назвал его "патологическим". Карлеман не мог получить это условие, рассматривая уравнение (1.1) на отрезке $[0, 1]$. Отметим, что в книге И.Я. Штаермана [6], гл. 1 было получено решение уравнения (1.1) на отрезке $[-a, a]$ в форме, содержащей дробь со знаменателем $\pi \ln(2/a)$, но случай $a = 2$ не рассматривался (вероятно, в связи с тем, что в дальнейшем величина a задавала полуширину малой области контакта упругого тела и штампа).

Обратим внимание на то, что формула (1.9) дает не само решение уравнения (1.1), а его первообразную. При решении многих задач этого достаточно (соответствующие примеры будут рассмотрены ниже). Если же продифференцировать обе части равенства (1.9), то получим

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{(b-x)(x-a)}}\left[\int\limits_a^b \frac{\sqrt{(b-t)(t-a)}\, f'(t)}{t-x}\, dt + C\right]. \tag{1.10}$$

Соответствие между классами решений уравнения Карлемана (1.1) и классами его правых частей легко установить с помощью следующих трех утверждений.

Пусть $L_p = L_p(a, b)$ – пространство функций на $[a, b]$, суммируемых с весом p; A_p – множество функций $\psi(x)$, для которых при некотором $A > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{|\psi(t_{j+1}) - \psi(t_j)|^p}{|t_{j+1} - t_j|^{p-1}} < A$$

(A не зависит от выбора точек $\{t_j,\ j = 1\,..\,n\}$ на $[a, b]$); $H_\lambda =$

$H_\lambda([a,b])$ – множество функций, удовлетворяющих на $[a,b]$ условию Гельдера с показателем λ, $0 < \lambda \le 1$.

I. Функция $\psi(x)$ на $[a,b]$ представима в виде

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt, \quad \varphi(t) \in L_p(a,b),\ p > 1$$

тогда и только тогда, когда $\psi(x) \in A_p([a,b])$ и $\psi(a) = 0$.

II. $H_1 \subset A_p \subset H_\lambda, \quad \lambda = (p-1)/p, \quad p > 1.$

III. $\psi(x) \in A_p$ тогда и только тогда, когда
1) $\psi(x) \in H_\lambda, \quad \lambda = (p-1)/p$;
2) почти всюду существует производная $\psi'(x) \in L_p$.

Следовательно, естественным классом искомых решений уравнения (1.1) является класс функций L_p, $p > 1$. При этом правая часть уравнения необходимо принадлежит классу H_λ, $\lambda = (p-1)/p$ на любом отрезке, содержащимся внутри (a,b), и может иметь особенность логарифмического типа вида $C\ln(b-x)$ в точке b.

Рассмотрим интегральное уравнение с логарифмическим ядром

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{a_j}^{b_j} \varphi(t) \ln \frac{1}{|t-x|}\,dt = f(x), \quad x \in \Gamma = \bigcup_{j=1}^{n}(a_j, b_j), \tag{1.11}$$

заданное на конечной совокупности отрезков вещественной оси, не имеющих общих точек. Введем вспомогательные неизвестные постоянные

$$C_j = \int_{a_j}^{b_j} \varphi(t)\,dt, \quad j = 1 \,..\, n \tag{1.13}$$

и запишем уравнение (1.12) в виде

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{a_j}^{b_j} \varphi(t) \ln\left|\frac{b_j - x}{t-x}\right| dt = h(x), \quad h(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j \ln|b_j - x|.$$

Представим логарифмические функции в виде интегралов с ядром Коши с переменным пределом. После изменения порядка интегрирования получим

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{a_j}^{b_j}\left(\int_{a_j}^{\xi}\varphi(t)\,dt\right)\frac{d\xi}{\xi-x}=h(x),\quad x\in\Gamma.$$

Из формулы (1.5) следует, что

$$\int_{a_j}^{x}\varphi(t)\,dt=-\frac{R(x)}{\pi^2}\sum_{j=1}^{n}\int_{a_j}^{b_j}\frac{h(t)}{R(t)}\frac{dt}{t-x},\tag{1.12}$$

$$R(x)=\left(\prod_{j=1}^{n}(x-a_j)(b_j-x)\right)^{1/2},$$

причем постоянные C_j должны удовлетворять системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{j=1}^{n}C_j\int_{\Gamma}\frac{\ln|b_j-t|}{R(t)}t^{j-1}\,dt+\int_{\Gamma}\frac{f(t)}{R(t)}t^{j-1}\,dt=0,\quad j=1..n.\tag{1.13}$$

После дифференцирования равенства (1.12) будем иметь

$$\varphi(x)=-\frac{1}{\pi^2R(x)}\left\{\int_{\Gamma}\frac{R(t)h'(t)}{t-x}\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_{\Gamma}\frac{h(t)}{R(t)}\left[R'(t)\,R(t)+\frac{R^2(x)-R^2(t)}{t-x}\right]\frac{dt}{t-x}\right\}.\tag{1.14}$$

Если определитель матрицы коэффициентов СЛАУ (1.13) не равен нулю, то все постоянные C_j определятся однозначно. Если же определитель обращается в нуль, то появится одно или несколько условий разрешимости, которым должна удовлетворять правая часть $f(x)$ уравнения (1.11). При этом столько же произвольных постоянных C_j войдет в решение.

В общем случае исследовать матрицу коэффициентов СЛАУ (1.13) и вычислить ее ранг достаточно сложно. Заметим, что при этом существенное значение имеет только взаимное расположение точек a_j и b_j. При $n = 1$ имеем, как частный случай, уравнение Карлемана.

<table>
<tr><th colspan="2">Значения коэффициентов</th><th>Усл. разреш.</th><th>Постоянная C</th></tr>
<tr><td colspan="2">$B(a) \neq 0, \;\; B(b) \neq 0$</td><td>нет</td><td>произвольная</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$B(a) = 0,$
$B(b) \neq 0$</td><td>$A_2(a) \neq 0$</td><td>нет</td><td>$f(a)/A_2(a)$</td></tr>
<tr><td>$A_2(a) = 0$</td><td>$f(a) = 0$</td><td>произвольная</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$B(a) \neq 0,$
$B(b) = 0$</td><td>$A_1(b) \neq 0$</td><td>нет</td><td>$f(b)/A_1(b)$</td></tr>
<tr><td>$A_1(b) = 0$</td><td>$f(b) = 0$</td><td>произвольная</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$B(a) = 0,$
$B(b) = 0$</td><td>$A_2(a) \neq 0,$
$A_1(b) \neq 0$</td><td>$\dfrac{f(a)}{A_2(a)} = \dfrac{f(b)}{A_1(b)}$</td><td>$\dfrac{f(a)}{A_2(a)} = \dfrac{f(b)}{A_1(b)}$</td></tr>
<tr><td>$A_2(a) = 0,$
$A_1(b) \neq 0$</td><td>$f(a) = 0$</td><td>$f(b)/A_1(b)$</td></tr>
<tr><td>$A_2(a) \neq 0,$
$A_1(b) = 0$</td><td>$f(b) = 0$</td><td>$f(a)/A_2(a)$</td></tr>
<tr><td>$A_2(a) = 0,$
$A_1(b) = 0$</td><td>$f(a) = f(b) = 0$</td><td>произвольная</td></tr>
</table>

Метод интегральных тождеств можно использовать во всех тех случаях, когда интегральное уравнение 1-го рода с логарифмической особенностью в ядре сводится к характеристическому уравнению с ядром Коши для новой искомой функции. При этом картина разрешимости исходного уравнения существенно усложняется. Приведем в качестве примера уравнение на отрезке вещественной оси

$$A_1(x) \int_a^x \varphi(t)\, dt + A_2(x) \int_x^b \varphi(t)\, dt +$$

$$+ B(x) \int_a^b \varphi(t) \ln |t - x|\, dt = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Пусть $[A_1(x) - A_2(x)]^2 + \pi^2 B^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ и $A_1(x)$, $A_2(x)$, $B(x)$, $f(x) \in H_\lambda$. Все возможные ситуации приведены в таблице. Кроме того, при отрицательном индексе κ появляются условия разрешимости вида

$$\int_a^b \frac{f(t)}{Z(t)} t^{j-1} dt = C \int_a^b \frac{B(t)\ln(b-t) + A_2(t)}{Z(t)} t^{j-1} dt, \quad j = 1..-\kappa.$$

Исследование на нетеровость оператора

$$\int_a^b [u(t,x) + v(t,x)\ln|t-x|]\varphi(t)\, dt, \quad \varphi(x) \in L_p(a,b)$$

в случае, когда функция $u(t,x)$ имеет разрыв при $t = x$, дано в [8]. Случай, когда $u(t,x) \equiv 0$, исследован в [9], [10]. В работах Б.С. Рубина и А.А. Килбаса (см. обзор [11]) исследованы операторы со степенно-логарифмическим ядром вида

$$\int_a^b \frac{c(t,x)}{|t-x|^{1-\alpha}} \ln^m \frac{\gamma}{|t-x|} \varphi(t) dt, \quad \varphi(\cdot) \in L_p(a,b)$$

и интегральные операторы более общего вида.

1.2. Уравнения с логарифмическими периодическими ядрами

Пусть $[\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1..p$ – непересекающиеся отрезки, принадлежащие интервалу $(0, 2\pi)$, и $\Gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{p} (\alpha_j, \beta_j)$. Рассмотрим интегральное уравнение с логарифмическим периодическим ядром

$$\sum_{j=1}^{p} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \varphi(t) \ln \frac{1}{2\left|\sin \dfrac{t-x}{2}\right|}\, dt = f(x), \quad x \in \Gamma. \tag{1.15}$$

Решение этого уравнения будем искать в классе $L_p(\Gamma)$, предполагая, что $f(x) \in H_\lambda(\Gamma)$, $\lambda = (p-1)/p$. Добавив к левой и правой частям уравнения (2.1) выражение

$$\sum_{j=1}^{p} C_j \ln 2\left|\sin\frac{\beta_j - x}{2}\right| = \sum_{j=1}^{p}\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\varphi(t)\ln 2\left|\sin\frac{\beta_j - x}{2}\right| dt,$$

получим

$$\sum_{j=1}^{p}\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\varphi(t)\ln\frac{\left|\sin\dfrac{\beta_j - x}{2}\right|}{\left|\sin\dfrac{t-x}{2}\right|}\,dt = f(x)+\sum_{j=1}^{p} C_j \ln 2\left|\sin\frac{\beta_j - x}{2}\right|, \quad x\in\Gamma. \tag{1.16}$$

Будем считать, что линии $[\alpha_j, \beta_j]$ – отрезки вещественной оси плоскости комплексной переменной z. Перейдем с плоскости z на плоскость $w = e^{iz}$. Обозначим $e^{it} = \tau$, $e^{ix} = y$, $e^{i\alpha_j} = a_j$, $e^{i\beta_j} = b_j$ и условимся считать, что выражение $\varphi(t)\,dt$ переходит в выражение $\chi(\tau)\,d\tau$. Легко видеть, что при преобразовании $w = e^{iz}$ отрезки $[\alpha_j, \beta_j]$ преобразуются в дуги единичной окружности $a_j b_j$.

Так как $|\sin t| = \sin|t|$ при $-\pi \le t \le \pi$, то при $t > x$

$$2\left|\sin\frac{t-x}{2}\right| = -ie^{-i\frac{t+x}{2}}\left(e^{it} - e^{ix}\right),$$

а при $t < x$

$$2\left|\sin\frac{t-x}{2}\right| = -ie^{-i\frac{t+x}{2}}\left(e^{ix} - e^{it}\right).$$

Следовательно, при $x \notin [t, \beta_j]$ или $y \notin \tau b_j$

$$\ln\frac{\left|\sin\dfrac{\beta_j - x}{2}\right|}{\left|\sin\dfrac{t-x}{2}\right|} = \ln\frac{b_j - y}{\tau - y} + \frac{1}{2}\ln\frac{\tau}{b_j},$$

а при $x \in [t, \beta_j]$ или $y \in \tau b_j$

$$\ln\frac{\left|\sin\dfrac{\beta_j - x}{2}\right|}{\left|\sin\dfrac{t-x}{2}\right|} = \ln\frac{b_j - y}{y - \tau} + \frac{1}{2}\ln\frac{\tau}{b_j}.$$

Так как

$$\int\limits_{\tau b_j} \frac{d\xi}{\xi - y} = \ln \frac{b_j - y}{\tau - y}$$

при $y \notin \tau b_j$ и

$$\int\limits_{\tau b_j} \frac{d\xi}{\xi - y} = \ln \frac{b_j - y}{y - \tau}$$

при $y \in \tau b_j$, то интегральное уравнение (1.16) примет вид

$$\sum_{j=1}^{p} \int\limits_{a_j b_j} \chi(\tau) \int\limits_{\tau b_j} \frac{d\xi}{\xi - y}\, d\tau =$$

$$= f(-i \ln y) + \sum_{j=1}^{p} C_j \ln |b_j - y| - C_0, \quad y \in L, \tag{1.17}$$

где еще одна вспомогательная неизвестная постоянная

$$C_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} \int\limits_{a_j b_j} \chi(\tau) \ln \frac{\tau}{b_j}\, d\tau. \tag{1.18}$$

Уравнение (1.17) с логарифмическим ядром эквивалентно уравнению с ядром Коши

$$\sum_{j=1}^{p} \int\limits_{a_j b_j} \psi(\xi)\, \frac{d\xi}{\xi - y} = f(-i \ln y) + \sum_{j=1}^{p} C_j \ln |b_j - y| - C_0, \quad y \in L$$

относительно первообразной искомой функции, то есть уравнению вида (1.4). Из формул (1.5) и (1.6) следует, что его единственное решение

$$\psi(y) = -\frac{1}{\pi^2} \Pi(y) \sum_{j=1}^{p} \int\limits_{a_j b_j} \left[f(-i \ln \tau) + \sum_{j=1}^{p} C_j \ln |b_j - \tau| \right] \frac{1}{\Pi(\tau)}\, \frac{d\tau}{\tau - y} \tag{1.19}$$

существует тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\int\limits_{L} \frac{\tau^j}{\Pi(\tau)} \left[f(-i \ln \tau) + \sum_{j=1}^{p} C_j \ln |b_j - \tau| \right] d\tau = 0, \quad j = 0 \,..\, p - 1.$$

Отметим, что постоянная C_0 не содержится в формуле (1.19).

Возвратившись к старым переменным, получим

$$\int\limits_{\alpha_j}^{x} \varphi(t)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2} R(x) \sum_{j=1}^{p} \int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} \left[f(t) + \sum_{j=1}^{p} \ln 2 \left| \sin \frac{\beta_j - t}{2} \right| \right] \frac{1}{R(t)} \frac{dt}{2 \sin \dfrac{t-x}{2}},$$

где

$$R(x) = \left(\prod_{j=1}^{p} \sin \frac{x - \alpha_j}{2} \sin \frac{\beta_j - x}{2} \right)^{1/2}.$$

Формулу обращения интегрального уравнения

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \varphi(t) \ln \frac{1}{\left| \sin \dfrac{t-x}{2} \right|}\, dt = f(x), \quad x \in (0, 2\pi) \tag{1.20}$$

можно получить другим способом. Левая часть уравнения (1.20) определяет интегральный оператор, имеющий ортогональную на $[0, 2\pi]$ полную систему собственных функций $\{e^{inx},\ n = 0, \pm 1, \ldots\}$. Легко проверить, что

$$\int\limits_{0}^{2\pi} e^{int} \ln \frac{1}{\left| \sin \dfrac{t-x}{2} \right|}\, dt = \lambda_n e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \ldots,$$

$$\lambda_n = \left\{ n = 0 \,:\, 2\pi \ln 2;\ n \neq 0 \,:\, \frac{\pi}{|n|} \right\}.$$

Если $\varphi(t) = \sum\limits_n \varphi_n e^{int}$ и $f(x) = \sum\limits_n f_n e^{inx}$, то $\varphi_n \lambda_n = f_n\ \forall n$. Поэтому

$$\varphi(x) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \right) e^{inx} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_n \frac{1}{\lambda_n} e^{in(x-t)}\right) dt. \qquad (1.21)$$

Ядро интегрального оператора в правой части равенства представлено в виде бесконечной суммы, которую нужно понимать как сумму ряда, сходящегося в обобщенном смысле (так как $\lambda_n \to 0$ при $|n| \to \infty$). Из (1.21) следует, что

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi^2 \ln 2}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\, dt + \sum_{n\neq 0} \frac{|n|}{2\pi^2}\left(\int\limits_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt\right) e^{inx}. \quad (1.22)$$

Проинтегрировав по частям, получим известную формулу обращения

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi^2 \ln 2}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\, dt - \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} f'(t) \operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}\, dt.$$

Здесь использовано разложение

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -i\sum_{n\neq 0} \operatorname{sgn} n\, e^{inx},$$

которое легко получить дифференцированием из равенства (см. [12], с. 457)

$$-\ln 2\sin\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{e^{inx}}{|n|}, \quad 0 < x < 2\pi. \qquad (1.23)$$

Явные решения уравнений

$$\int\limits_\Gamma \varphi(t)\left[\ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{t-x}{2}\right|} \pm \ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{t+x}{2}\right|}\right] dt = f(x), \quad x \in \Gamma$$

получены в работе [13].

2. Регуляризация. Метод полуобращения

Рассмотрим общие принципы регуляризации линейных операторных уравнений.

В теории сингулярных интегральных уравнений [3], [4] *регуляризация* – это преобразование сингулярного уравнения в регулярное. Интегральное уравнение 2-го рода принято называть регулярным, если в нем не содержится сингулярный (понимаемый в смысле главного значения по Коши) интеграл от искомой функции.

Наиболее естественные способы регуляризации сингулярных уравнений с ядром Коши основаны на том, что композиция (суперпозиция) двух сингулярных интегральных операторов также является сингулярным интегральным оператором. Один из двух операторов в композиции можно подобрать так, чтобы у композиции сингулярная часть исчезла, т.е. обратился в нуль коэффициент при сингулярном интеграле. В связи с этим различают два способа регуляризации – регуляризацию *слева* и регуляризацию *справа*.

На абстрактном языке теории операторов левая и правая регуляризации могут быть описаны так. Пусть линейный оператор A действует из нормированного пространства X в нормированное пространство Y, $A : X \to Y$. Оператор $B : Y \to X$ называется левым (правым) регуляризатором оператора A, если $BA = I + T_1$ ($AB = I + T_2$), где I – тождественный оператор, а T_1 (T_2) – вполне непрерывный. Смысл такой регуляризации – преобразование оператора A в *оператор Фредгольма 2-го рода.*

В теории операторов Нетера или Ф-операторов (см., например, [14], [15], [16]) установлено, что левый и правый регуляризаторы нетерова оператора также являются нетеровыми. Более того, если линейный непрерывный оператор допускает одновременно и левую, и правую регуляризацию, то он нетеров.

Как известно, левый и правый регуляризаторы не являются эквивалентными – при регуляризации могут появиться лишние решения, или часть решений исходного уравнения может быть потеряна. Эквивалентная регуляризация сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши может быть проведена с помощью *формулы обращения* его *характеристической части* (метод Карлемана-Векуа или третий метод регуляризации). Этот метод впервые был использован в работе Т.Карлемана [2].

Метод Карлемана-Векуа представляет собой один из вариантов метода полуобращения. Действительно, этот метод сводится к следующему. Пусть оператор A представлен в виде суммы двух других операторов, $A = A_1 + A_2$, причем оператор A_1 обратим. Перепишем операторное уравнение $Ax = y$ в виде $A_1x + A_2x = y$ и, применив оператор A_1^{-1}, получим $x + A_1^{-1}A_2x = A_1^{-1}y$. Такое преобразование, грубо говоря, позволяет перейти от операторного уравнения 1-го рода к уравнению 2-го рода. Разумеется, оператор A нужно разлагать в сумму $A_1 + A_2$ так, чтобы оператор $A_1^{-1}A_2$ был вполне непрерывным и, следовательно, оператор $I + A_1^{-1}A_2$ – оператором Фредгольма 2-го рода.

В теории *некорректно поставленных задач* (см. [17], [18]) метод регуляризации – метод численного решения задачи, *устойчивый* к малым возмущениям исходных данных. Для операторного уравнения $Ax = y$ речь идет о малых по норме возмущениях оператора A и правой части y. Как известно, устойчивость решения уравнения $Ax = y$ с непрерывно обратимым оператором A зависит от значения его *меры* (числа) *обусловленности* $\eta(A) = ||A^{-1}||\,||A||$: чем ближе $\eta(A)$ к единице, тем лучше (по определению $\eta(A) \geq 1$). Поэтому приведение исходной задачи (в том числе, интегрального уравнения 1-го рода с логарифмической особенностью в ядре) к уравнению Фредгольма 2-го рода, вообще говоря, не гарантирует, что это уравнение может быть решено численно каким-либо простым методом, рекомендованным для таких уравнений. В этом смысле регуляризация интегрального уравнения 1-го рода методом полуобращения может оказаться незавершенной.

Рассмотрим различные способы регуляризации интегральных уравнений 1-го рода с логарифмической особенностью в ядре на примере уравнений, к которым приводятся скалярные задачи дифракции электромагнитных волн на системах бесконечно тонких идеально проводящих лент (экранов).

2.1. Дифракция на периодической решетке

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны на l-периодической решетке из бесконечно тонких идеально проводящих лент, параллельных оси x. Обозначим через $\mathcal{M}$ ("металл") объединение принадлежащих $(0, l)$ интервалов, представляющих собой сечения лент в плоскости $x = \text{const}$ и через $\mathcal{N}$ ("не металл") – открытое множество, дополняющее $\overline{\mathcal{M}}$ до $(0, l)$. Ограничимся случаем скалярного E-поляризованного поля. Пусть из области $z > 0$ нормально к решетке падает плоская электромагнитная волна с потенциальной функцией $u^0(y, z) = e^{-ikz}$.

Обозначим $\Lambda = 2\pi/l$. Будем искать потенциальные функции рассеянного поля над решеткой и под решеткой в виде

$$\begin{aligned} u^+(y,z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\gamma_n z} e^{i\Lambda n y}, \quad z > 0, \\ u^-(y,z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{-i\gamma_n z} e^{i\Lambda n y}, \quad z < 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - (\Lambda n)^2} =$$

$$= \left\{ n \le l/\lambda : \ \sqrt{k^2 - (\Lambda n)^2}; \ n \ge l/\lambda : \ i\sqrt{(\Lambda n)^2 - k^2} \right\}.$$

Ветвь корня выбрана так, чтобы отдельные гармоники были затухающими или уходящим на бесконечность волнами (при зависимости вида $e^{-i\omega t}$ компонент поля от времени). При этом $\gamma_0 = k$ и $\gamma_n \sim i|n|$ при $|n| \to \infty$.

Можно показать различными способами, что представления (2.1) содержат все решения уравнения Гельмгольца в верхней и нижней полуплоскостях, которые соответствуют имеющим физический смысл решениям задачи дифракции.

Из условий сопряжения полей на плоскости xy следует, что задача дифракции плоской волны на периодической решетке сводится после исключения коэффициентов b_n к парному сумматорному уравнению

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\Lambda n y} = -1, \ y \in \mathcal{M}, \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{i\Lambda n y} = 0, \ y \in \mathcal{N}. \tag{2.3}$$

Покажем, что парное уравнение (2.2), (2.3) равносильно интегральному уравнению с логарифмической особенностью в ядре. Обозначим

$$u_0(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\Lambda n y}, \quad u_1(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{i\Lambda n y}.$$

Если $a_n\gamma_n$ – коэффициенты Фурье функции $u_1(y)$, то в силу (2.3)

$$a_n\gamma_n = \frac{1}{l}\int_0^l u_1(\tau)e^{-i\Lambda n\tau}\,d\tau = \frac{1}{l}\int_{\mathcal{M}} u_1(\tau)e^{-i\Lambda n\tau}\,d\tau.$$

Подставив эти выражения в равенство (2.2), получим

$$\frac{1}{l}\int_{\mathcal{M}} u_1(\tau)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\gamma_n}e^{i\Lambda n(y-\tau)}\,d\tau = -1, \quad y\in\mathcal{M}. \tag{2.4}$$

Так как $\gamma_n \sim i|n|$ при $|n|\to\infty$, то из формулы (1.23) следует

$$\sum_{n\neq 0}\frac{1}{|n|}e^{i\Lambda n(y-\tau)} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\Lambda(y-\tau)}{n} = 2\ln\frac{1}{2\sin\dfrac{\Lambda|y-\tau|}{2}}.$$

Поэтому из ядра интегрального уравнения (2.4) можно выделить сингулярную часть в виде логарифмического периодического ядра. Парное уравнение (2.2), (2.3) и интегральное уравнение (2.4) равносильны. Поэтому методы регуляризации уравнения (2.4) можно рассматривать и как методы регуляризации парного уравнения, а также наоборот.

Задачи дифракции электромагнитных волн на периодических решетках рассматривались ранее многими авторами. Наиболее полные результаты исследований в этом направлении изложены в монографиях [19], [20], [21]. В работе [22] для решения парного уравнения (2.2), (2.3) был впервые использован метод задачи Римана-Гильберта (метод полуобращения), основанный на том, что явное решение парного уравнения

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\Lambda n y} = -1,\ \ y\in\mathcal{M}, \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n|n|e^{i\Lambda n y} = 0,\ \ y\in\mathcal{N}$$

можно получить сведением к краевой задаче для аналитических функций. Аналогом метода полуобращения, основанного на решении задачи Римана-Гильберта, является следующий подход: в левой части уравнения (2.4) нужно оставить только оператор с логарифмическим периодическим ядром и, используя формулу его обращения (см. раздел 1.2), получить интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. В работах Г.Н. Гестриной [23] (см. также [19], гл. 12) было получено и исследовано интегральное уравнение вида (2.3). Этот же подход использован в работе Н.В. Ногина [24]. Отметим также, что численное решение парного уравнения (2.2), (2.3) было найдено методом дискретных вихрей [25] (или [26], гл. 15).

Рассмотрим другой способ сведения парного уравнения (2.2), (2.3) к интегральным уравнениям, следуя работе [27]. Пусть

$$K_1(\tau, y) = \frac{1}{l}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{i\Lambda m(y-\tau)}, \quad K_0(\tau, y) = \frac{1}{l}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m e^{i\Lambda m(y-\tau)}.$$

Легко проверить, что функции $e^{i\Lambda n y}$ ортогональны на $[0, l]$ и являются собственными функциями ядер $K_1(\tau, y)$ и $K_0(\tau, y)$, соответствующими собственным значениям $1/\gamma_n$ и γ_n . Следовательно, при $y \in [0, l]$ выполняются равенства

$$\int_0^l u_1(\tau)\, K_1(\tau, y)\, d\tau = u_0(y), \quad \int_0^l u_0(\tau)\, K_0(\tau, y)\, d\tau = u_1(y). \tag{2.5}$$

Отметим, что в общем случае эти равенства следует понимать в смысле теории распределений. Как было показано в [27], равенства (2.5) устанавливают связь между граничными значениями в переопределенной задаче Коши для уравнения Гельмгольца в полуплоскости в периодическом случае.

С учетом условий (2.2), (2.3), равенства (2.5) принимают вид

$$\begin{gathered} u_0(y) = \int_{\mathcal{M}} u_1(\tau)\, K_1(\tau, y)\, d\tau, \quad y \in [0, l], \\ u_1(y) = \int_{\mathcal{N}} u_0(\tau)\, K_0(\tau, y)\, d\tau = -f(y), \\ f(y) = \int_{\mathcal{M}} K_0(\tau, y)\, d\tau, \quad y \in [0, l]. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Тогда из парного уравнения следует, что функция $u_1(y)$ на $\mathcal{M}$ должна быть решением интегрального уравнения

$$\int\limits_{\mathcal{M}} u_1(\tau)\, K_1(\tau, y)\, d\tau = -1, \quad y \in \mathcal{M}$$

и $u_1(y) = 0$ на $\mathcal{N}$. Это интегральное уравнение, легко видеть, полностью совпадает с интегральным уравнением (2.4). С другой стороны, функция $u_0(y) = -1$ на $\mathcal{M}$, а на $\mathcal{N}$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int\limits_{\mathcal{N}} u_0(\tau)\, K_0(\tau, y)\, d\tau = f(y), \quad y \in \mathcal{N}. \tag{2.7}$$

Обратим внимание на следующее: парное уравнение заменяется на интегральное уравнение относительно одной из вспомогательных функций не на всем отрезке $[0, l]$, а только на $\mathcal{M}$ или $\mathcal{N}$. Следовательно, рассматривается только часть парного уравнения. После того, как решение этого уравнения будет найдено, его нужно продолжить на весь отрезок с помощью второй части парного уравнения. Это значит, что фактически парное уравнение приводится не к интегральным уравнениям 1-го рода на части отрезка $[0, l]$, а к уравнениям 3-го рода на $[0, l]$.

Исключая из (2.6) функцию $u_0(y)$, получим

$$u_1(y) = \int\limits_{\mathcal{M}} u_1(\tau) \left(\int\limits_{\mathcal{N}} K_1(\tau, \xi)\, K_0(\xi, y)\, d\xi \right) d\tau - f(y), \; y \in \mathcal{M}. \tag{2.8}$$

Ядро этого интегрального уравнения представляет собой композицию 2-го рода по В.Вольтерра [28] ядер $K_0(\tau, y)$ и $K_1(\tau, y)$.

Рассмотрим теперь методы приближенного решения интегральных и сумматорных уравнений задачи дифракции электромагнитной волны на периодической решетке. Отметим, что техника вывода этих уравнений основана на представлении потенциальных функций искомого поля в виде разложений в ряды Фурье (2.1). Поэтому, вообще говоря, в результате счета должны быть найдены приближенные значения именно коэффициентов a_n и b_n. По приближенному решению $u_1(t)$ интегрального уравнения

(2.4) или (2.7) эти коэффициенты, разумеется, тоже могут быть вычислены, но этот процесс будет достаточно трудоемким, так как он связан с вычислением интегралов от быстро осциллирующих функций.

Перейдем от функциональных уравнений (парных или интегральных) к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) для определения искомых коэффициентов a_n. Этот переход прост: нужно приравнять коэффициенты Фурье на отрезке $[0,l]$ левой и правой частей парного уравнения (2.2), (2.3). Получим БСЛАУ

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{n-m}\, a_n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{n-m}\, \gamma_n\, a_n = -I_{-m}, \quad m = 0, \pm 1, \ldots,$$

где

$$I_n = \int\limits_{\mathcal{M}} e^{i\Lambda n y}\, dy, \quad J_n = \int\limits_{\mathcal{N}} e^{i\Lambda n y}\, dy = \int\limits_0^l e^{i\Lambda n y}\, dy - I_n = l\delta_{k0} - I_n,$$

или

$$l\gamma_m\, a_m + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1-\gamma_n)\, I_{n-m}\, a_n = -I_{-m}, \quad m = 0, \pm 1, \ldots. \qquad (2.9)$$

То же самое получим, если приравняем коэффициенты Фурье левой и правой частей уравнения (2.4), дополненного равенством $u_1(y) = 0$ на $\mathcal{N}$.

Приближенным решением БСЛАУ (2.9) естественно считать решение усеченной СЛАУ

$$l\gamma_m\, a_m + \sum_{n=-N}^{N} (1-\gamma_n)\, I_{n-m}\, a_n = -I_{-m}, \quad m = -N..N, \qquad (2.10)$$

дополненное нулевыми компонентами до бесконечномерного вектора. Простой вычислительный эксперимент показывает, что такой приближенный метод неустойчив и последовательность приближенных решений не сходится. Можно проверить, что достаточное условие сходимости метода усечения (метода редукции) [29] не выполнено.

Заметим, что разделение бесконечных (и даже конечных) систем линейных алгебраических уравнений на системы 1-го рода и системы 2-го рода не вполне корректно. БСЛАУ (2.9) формально записана как система 2-го рода, но она же может быть представлена и как система 1-го рода.

Интегральное уравнение (2.8) дает качественно другой результат. Если приравнять коэффициенты Фурье левой и правой частей уравнения (2.8), учитывая равенство $u_1(y) = 0$ на $\mathcal{N}$, то получим регулярную БСЛАУ

$$la_k - \frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\gamma_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{n-m}J_{m-k} = -I_{-k}, \; k = 0, \pm 1, \ldots . \tag{2.11}$$

Точно такая же БСЛАУ может быть получена непосредственно из парного уравнения (2.2), (2.3) следующим простым способом.

Преобразуем тождество (2.5) к виду

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\Lambda ny} = \int_0^l \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\gamma_n e^{i\Lambda n\tau} \right) K_1(\tau, y)\, d\tau$$

и учтем, что на $\mathcal{N}$ выражение в скобках обращается в нуль (вторая часть парного уравнения). Тогда при $y \in \mathcal{N}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\Lambda ny} = \int_{\mathcal{M}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\gamma_n e^{i\Lambda n\tau} \right) \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{i\Lambda m(y-\tau)}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\gamma_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{i\Lambda my}\, I_{n-m}.$$

Отсюда и из первой части парного уравнения следует, что (приравниваем коэффициенты Фурье) коэффициенты a_n должны быть решением системы уравнений (2.11).

2.2. Дифракция на конечном числе лент

Пусть в плоскости $z = 0$ размещены параллельные оси y идеально проводящие бесконечно тонкие экраны (металлические ленты) $\alpha_j < x < \beta_j$, $j = 1 \dots p$. Из области $z > 0$ на ленты падает электромагнитная волна. Нужно найти поле, образующееся при ее дифракции. Ограничимся случаем, когда компоненты электромагнитного поля не зависят от переменной y (скалярная задача дифракции).

Обозначим через $\mathcal{M}$ объединение всех интервалов (α_j, β_j), а через $\mathcal{N}$ – открытое множество, дополняющее $\mathcal{M}$ до всей оси x. Для E-поляризованных волн задача дифракции сводится к задаче сопряжения для уравнения Гельмгольца: найти решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0$$

при $z > 0$ и при $z < 0$, удовлетворяющие при $z = 0$ условиям

$$u(x, 0+0) + u_0^0(x) = 0, \quad u(x, 0-0) = 0, \quad x \in \mathcal{M},$$

$$u(x, 0+0) + u_0^0(x) = u(x, 0-0), \quad x \in \mathcal{N},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, 0+0) + u_1^0(x) = \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0-0), \quad x \in \mathcal{N}$$

и условию излучения. Здесь $u_0^0(x) = u^0(x, 0+0)$, $u_1^0(x) = \dfrac{\partial u^0}{\partial z}(x, 0+0)$ – следы на $z = 0$ потенциальной функции $u^0(x, z)$ внешнего поля и ее нормальной производной.

Задача сопряжения для уравнения Гельмгольца равносильна интегральному уравнению

$$\int\limits_{\mathcal{M}} u_1(t)\, K_1(t, x)\, dt = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}, \tag{2.12}$$

где

$$K_1(t, x) = \frac{i}{2\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) H_0^{(2)}(k|t - x|),$$

т.е. интегральному уравнению 1-го рода с логарифмической особенностью в ядре.

Интегральное уравнение (2.12) можно получить разными способами. Наиболее часто используется следующий подход (см., например, [30]): решение задачи сопряжения ищется в виде потенциала простого слоя – интеграла по $\mathcal{M}$ с функцией Ханкеля в качестве ядра. В этом случае искомое решение $u_1(x)$ – плотность потенциала.

Рассмотрим другой способ вывода уравнения (2.12), следуя работе [27]. Будем искать решение задачи сопряжения в полуплоскостях $z > 0$ и $z < 0$ как решения переопределенных задач Коши для уравнения Гельмгольца в классе распределений медленного роста, уходящих от прямой $z = 0$ на бесконечность с условиями на границе полуплоскостей

$$u(x, 0+0) = u_0^+(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0+0) = u_1^+(x),$$

$$u(x, 0-0) = u_0^-(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0-0) = u_1^-(x).$$

Как показано в [27], граничные распределения связаны друг с другом равенствами

$$u_1^\pm(x) = \pm \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0^\pm(t) K_0(t, x) dt, \quad u_0^\pm(t) = \pm \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_1^\pm(\tau) K_1(\tau, t) d\tau, \tag{2.13}$$

где

$$K_0(\tau, x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi)\, e^{i\xi(\tau - x)}\, d\xi,$$

$$K_1(\tau, x) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{\gamma(\xi)}\, e^{i\xi(\tau - x)}\, d\xi,$$

здесь

$$\gamma(\xi) = \{|\xi| \geq k : i\sqrt{\xi^2 - k^2}; \quad |\xi| \leq k : -\sqrt{k^2 - \xi^2}\}.$$

Равенства (2.13) будем называть интегральными тождествами (это тождества Пуанкаре-Стеклова). Аналогичные тождества выполняются и для следов на $z = 0$ потенциальной функции падающей волны.

Вычислим интегралы, получим

$$K_0(\tau, x) = \frac{-i}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(1/2)\, \frac{k}{|\tau - x|}\, H_1^{(2)}(k|\tau - x|),$$

и ядро уравнения (2.12).

На языке граничных распределений задача дифракции на металлических лентах может быть сформулирована как парное функциональное уравнение

$$u_0^+(x) = -u_0^0(x), \;\; x \in \mathcal{M}; \quad u_1^+(x) = 0, \;\; x \in \mathcal{N}$$

или

$$u_0^-(x) = 0, \;\; x \in \mathcal{M}; \quad u_1^-(x) = u_1^0(x), \;\; x \in \mathcal{N}. \tag{2.14}$$

Интегральные тождества (2.13) с учетом (2.14) принимают вид

$$u_0^+(t) = \int_{\mathcal{M}} u_1^+(\tau) K_1(\tau, t) \, d\tau,$$

$$u_1^+(x) = -\int_{\mathcal{M}} u_0^0(t) K_0(t, x) \, dt + \int_{\mathcal{N}} u_0^+(t) K_0(t, x) \, dt,$$

$$u_0^-(t) = -\int_{\mathcal{M}} u_1^-(\tau) K_1(\tau, t) \, d\tau - \int_{\mathcal{N}} u_1^0(\tau) K_1(\tau, t) \, d\tau, \tag{2.15}$$

$$u_1^-(x) = -\int_{\mathcal{N}} u_0^-(t) K_0(t, x) \, dt.$$

Первое из этих равенств, легко видеть, дает интегральное уравнение (2.12). В этом случае искомая функция $u_1(x) = u_1^+(x)$.

При численном решении интегрального уравнения (2.12) рекомендуется использовать метод Галеркина. Если рассматривается случай, когда $\mathcal{M} = (\alpha, \beta)$ (одна лента), то интегральное уравнение заменой переменной приводится к уравнению вида

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t) \left[\ln \frac{1}{|t-x|} + r(t, x) \right] dt = f(x), \quad x \in [-1, 1],$$

здесь логарифмическая особенность ядра выделена аналитически в виде отдельного слагаемого. Приближенное решение уравнения ищется в виде

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{j=1}^{N} a_j \, T_{j-1}(t),$$

где $T_j(t)$ – полиномы Чебышева 1-го рода, образующие ортогональную с весом на отрезке $[-1,1]$ систему функций. Существенно, что полиномы Чебышева 1-го рода – собственные функции интегрального оператора с логарифмическим ядром

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln\frac{1}{|t-x|}\, dt = \left\{ j=0: \ \pi\ln 2; \quad j\neq 0: \ \pi/j \right\} T_j(x).$$

Напомним, что общая схема метода Галеркина (см. [31]) состоит в следующем. Пусть линейный оператор A действует из линейного пространства X в линейное пространство Y. Выберем в $D(A) \subset X$ координатную систему $\{x_j, \ j=1,2,\ldots\}$ линейно независимых элементов и в Y^* – проекционную систему $\{y_k^*, \ k=1,2,\ldots\}$ линейно независимых элементов. Будем искать приближенное решение $\tilde{x} = \sum\limits_{j=1}^{N} a_j x_j$ операторного уравнения

$$Ax = y \tag{2.16}$$

так, чтобы выполнялись равенства $< A\tilde{x} - y, y_k^* >= 0$, $k = 1\,..\,N$. Таким образом, уравнению (2.16) ставится в соответствие аппроксимирующая его СЛАУ

$$\sum_{j=1}^{N} < Ax_j, y_k^* > a_j = < y, y_k^* >, \quad k = 1\,..\,N. \tag{2.17}$$

В общем случае нет оснований утверждать, что последовательность приближенных решений $\tilde{x}$ сходится при $N\to\infty$ к точному решению. Не ясно даже, разрешима или нет система линейных уравнений (2.17). Обоснование метода Галеркина требует дополнительных построений.

Пусть $\{x_j^*, \ j=1,2,\ldots\}$ – система элементов X^*, биортогональная системе $\{x_j\}$, а $\{y_k, \ k=1,2,\ldots\}$ – система элементов Y, биортогональная системе $\{y_k^*\}$, то есть выполняются равенства $< x_j, x_k^* >= \delta_{kj}$ и $< y_j, y_k^* >= \delta_{kj}$. Элемент x заменим на его ряд Галеркина по биортогональной системе $\sum\limits_{j=1}^{\infty} < x, x_j^* > x_j$

(здесь числа $< x, x_j^* >$ - коэффициенты Галеркина). Тогда

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} < x, x_j^* > Ax_j.$$

Приравняв коэффициенты Галеркина элементов Ax и y по биортогональной системе $\{y_k\}$, $\{y_k^*\}$, получим БСЛАУ относительно коэффициентов Галеркина элемента x

$$\sum_{j=1}^{\infty} < Ax_j, y_k^* >< x, x_j^* >=< y, y_k^* >, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.18}$$

В этом смысле метод Галеркина можно рассматривать как метод усечения БСЛАУ (2.18).

Удобно считать, что X и Y - гильбертовы пространства. Тогда сопряженные пространства X^* и Y^* в силу теоремы Ф. Рисса можно отождествить с X и Y, а значения функционалов заменить на скалярные произведения: $< x, x_j^* >= (x, x_j^*)$ и $< y, y_k^* >= (y, y_k^*)$. БСЛАУ (2.18) перепишем в виде

$$\sum_{j=1}^{\infty}(Ax_j, y_k^*)(x, x_j^*) = (y, y_k^*), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Если $Y = X$, то одну и ту же систему элементов можно использовать и как координатную, и как проекционную. Кроме того, если эта система ортогональная, то коэффициенты и ряды Галеркина являются также коэффициентами и рядами Фурье.

Предположим, что $A = A_1 + A_2$, причем A_1 - положительно определенный оператор с дискретным спектром, действующий в гильбертовом пространстве X. Пусть $A_1 x_j = \lambda_j x_j$, $j = 1, 2, \ldots$, при этом $\{x_j\}$ - полная ортонормированная система элементов в X. Обозначим $a_j = (x, x_j)$, $j = 1, 2, \ldots$ Считая, что $\{y_k\} = \{x_k\}$, получим из (2.18)

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j x_j + A_2 x_j, x_k)\, a_j = (y, x_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

или

$$\lambda_k a_k + \sum_{j=1}^{\infty}(A_2 x_j, x_k)\, a_j = (y, x_k), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.19}$$

Но если (λ_j, x_j) – собственные пары оператора A_1, то легко построить оператор, обратный к A_1 (см., например, [32], с. 101) :

$$A_1^{-1} : y \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(y, x_k)\, x_k.$$

Действительно,

$$A_1^{-1} A_1 x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (x, x_j) x_j, x_k\Big)\, x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\, \lambda_k (x, x_k) x_k = x.$$

Легко видеть, что если к уравнению $A_1 x + A_2 x = y$ применить оператор A_1^{-1}, то получим уравнение

$$x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(A_2 x, x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(y, x_k) x_k$$

и БСЛАУ для коэффициентов Фурье элемента x

$$a_k + \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j=1}^{\infty} (A_2 x_j, x_k) a_k = \frac{1}{\lambda_k}(y, x_k), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Уравнения этой БСЛАУ отличаются от уравнений БСЛАУ (2.19) только множителем.

Таким образом, метод Галеркина с использованием ортогональной системы собственных элементов части оператора фактически представляет собой метод полуобращения.

Вернемся к интегральным тождествам (2.15) и рассмотрим другой способ регуляризации интегрального уравнения 1-го рода (2.12).

Исключая из (2.15) одно из граничных распределений, получим (как и в случае периодической решетки) интегральное уравнение 2-го рода

$$u_1^+(x) = \int\limits_{\mathcal{M}} u_1^+(\tau)\Big(\int\limits_{\mathcal{N}} K_1(\tau, t) K_0(t, x)\, dt\Big)\, d\tau -$$

$$- \int\limits_{\mathcal{M}} u_0^0(t) K_0(t, x)\, dt, \quad x \in \mathcal{M},$$

$$u_1^+(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N},$$

которое задано на всей оси x. Для его численного решения можно использовать метод Галеркина с функциями Эрмита в качестве координатной и одновременно проекционной системы.

Литература

[1] Carleman T. *Abelsche Integralgleichung mit konstanten Grenzen* // Math. Z. – 1922. – Bd. 15. – S.111-120.

[2] Carleman T. *Sur la resolution de certaines équations intégrales* // Arkiv mat., astr. och phys. – 1922. – Bd.16, №26. – P.1-19.

[3] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977.

[4] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968.

[5] Хведелидзе Б.В. *Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. / ВИНИТИ. – 1975. – 7. – С.5–162.

[6] Штаерман И.Я. *Контактная задача теории упругости.* – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. – 272 с.

[7] Самко С.Г. *Интегральные уравнения первого рода с логарифмическим ядром* // Методы отображений. – Грозный: Изд-во Чечено-Ингушск. ун-та, 1976. – С.41-69.

[8] Самко С.Г. *Интегральные уравнения первого рода с логарифмическим ядром, II* // Мат. анализ и его приложения. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 1978. – С.103-121.

[9] Рубин Б.С. *О нетеровости операторов типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами на отрезке вещественной оси* // Изв. Сев. -Кавказ. науч. центра высш. шк. Естеств. н. – 1973. - N4. – С.112-114.

[10] Рубин Б.С. *Операторы типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами в случае неотрицательного показателя степени при логарифме* // Изв. Сев. -Кавказ. науч. центра высш. шк. Естеств. н. – 1976. - N3. – С.17-22.

[11] Килбас А.А. *Интегральные уравнения первого рода с логарифмическими ядрами* // Науч. тр. Юбил. семинара по краевым задачам, посв. 75-летию со дня рожд. акад. АН БССР Ф.Д.Гахова. - Минск: Университетское, 1985. - С.57-64.

[12] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3.* – М.: Наука, 1970. – 656 с.

[13] Плещинский Н.Б. *Два интегральных уравнения с логарифмическими периодическими ядрами, разрешимые в замкнутой форме* // Докл. расшир. засед. семинара ин-та прикл. матем. им. И.Н. Векуа. – Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1988. – Т.3, №1. – С.154–157.

[14] Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.* – Кишинев: Штиинца, 1973. – 428 с.

[15] Прёсдорф З. *Некоторые классы сингулярных уравнений.* – М.: Мир, 1979. – 496 с.

[16] Рогожин В.С. *Теория операторов Нетера.* – РнД: Изд-во ростовск. ун-та, 1973. – 84 с.

[17] Тихонов А.Н., Арсенин В.Н. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1976.

[18] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* – М.: Наука, 1978.

[19] Шестопалов В.П. *Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн.* – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. – 400 с.

[20] Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. *Дифракция волн на решетках.* – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. – 287 с.

[21] Шестопалов В.П., Сиренко Ю.К. *Динамическая теория решеток.* – Киев: Наукова думка, 1989. – 214 с.

[22] Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П. *Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках* // Журн. техн. физ. – 1962. – 32, Вып. 4. – С.381-398.

[23] Гестрина Г.Н. *Дифракция плоской электромагнитной волны на металлической решетке* // Радиотехника, вып.10. – Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1969.

[24] Ногин Н.В. *К решению интегральных уравнений первого рода с логарифмическим ядром* // Мат. физ. (Киев). – 1982. – №31. – С.53–57.

[25] Гандель Ю.В. *О парных интегральных уравнениях, приводящих к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков* // Теория функций, функциональный анализ и их прил. – 1983. – Вып. 40. – С. 33–36.

[26] Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. *Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике.* – М.: Наука, 1985. – 256 с.

[27] Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. *Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций* // Препринт 2000–1. Казанское матем. об-во. – Казань, 2000. – 50 с.

[28] Вольтерра В. *Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений* . – М.: Наука, 1982. – 304 с.

[29] Канторович Л.В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа.* – Л.-М.: ГИТТЛ, 1949. – 696 с.

[30] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. *Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции).* – М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.

[31] Треногин В.А. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1980. – 496 с.

[32] Михлин С.Г. *Линейные уравнения в частных производных.* – М.: Высш. шк., 1977. – 432 с.